02.02.2026

24BMT7501T

Printed Pages : 7

End Term Examination, 2025-26 (Pawas)

U.G. Semester-V

B.A./B.Sc.

MATHEMATICS (MAJOR)

(Complex Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Max./Min. Marks : 100/40

Note : (i) All questions are to be answered in main answer-book. No supplementary answer-book will be provided.
परीक्षार्थी को सभी प्रश्नों के उत्तर मुख्य उत्तरपुस्तिका में ही देने होंगे। कोई भी पूरक उत्तरपुस्तिका नहीं दी जायेगी।

(ii) All parts of a question or its various parts are to be answered together, at one place in the answer-book.
एक प्रश्न या उसके भागों के उत्तर उत्तरपुस्तिका में एक साथ ही दिया जायेगा।

(iii) This question paper has **3** sections :
इस प्रश्न-पत्र में 3 खण्ड हैं :

Section-A contains **10** very short answer type questions (answer in 30 to 40 words). Each question carries **2** marks. **All** questions are **compulsory**. [10×2=20 Marks]
खण्ड-अ में **10** अति लघुत्तरात्मक प्रश्न हैं (उत्तर 30 से 40 शब्दों में)। प्रत्येक प्रश्न **2** अंकों का है। सभी प्रश्नों को करना अनिवार्य है।

Section-B contains **8** short answer type questions (two questions from each unit). The student will have to answer **4** questions, selecting **one** question from each unit. Each answer will have word limit of **200** words. Each question carries **10** marks. [4×10=40 Marks]
खण्ड-ब में **8** लघुउत्तरीय प्रश्न (प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न) हैं। विद्यार्थी को प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल चार प्रश्न करने हैं। प्रत्येक उत्तर की शब्द सीमा **200** शब्द होगी। प्रत्येक प्रश्न **10** अंकों का है।

Section-C contains 4 long answer type questions. Student will have to answer **any two** questions. Each answer has word limit of **400** words. Each question carries **20** marks. [2×20=40 Marks]
खण्ड-स में **4** दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न हैं। जिनमें से विद्यार्थी को किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक उत्तर की शब्द सीमा **400** शब्द होगी। प्रत्येक प्रश्न **20** अंकों का है।

SECTION-A / खण्ड-अ

1. (i) Define limit of a Complex function.

सम्मिश्र फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Analytic Function.

विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write Cartesian form of Cauchy-Riemann equations.

कॉची-रीमैन समीकरण का कार्तीय रूप लिखिए।

(iv) Define Magnification.

आवर्धन को परिभाषित कीजिए।

(v) Write down bilinear transformation.

द्विरैखिक रूपान्तरण लिखिए।

(vi) Define Power Series about a.

a के परितः घात श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define radius of Convergence.

अभिसरण त्रिज्या को परिभाषित कीजिए।

(viii) State Cauchy's Fundamental theorem.

कॉची के मूल प्रमेय का कथन लिखिए।

(ix) State Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय का कथन लिखिए।

(x) Define Essential Singularity.

अनिवार्य विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

SECTION-B / खण्ड-ब

Unit-I / इकाई-I

2. The necessary condition that a function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ be analytic in a domain D is that in D, u and v satisfy the Cauchy-Riemann equations i.e. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ [10]

फलन $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ के किसी प्रांत D में विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध है कि उस प्रान्त में u तथा v कॉची-रीमैन समीकरण सन्तुष्ट करते है, अर्थात् $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

OR / अथवा

3. (a) Derive polar form of Cauchy-Riemann equations. [5]

कॉची-रीमैन समीकरण का ध्रुवीय रूप व्युत्पन्न कीजिए।

(b) If $f(z) = u + iv$, is an analytic function of $z = x + iy$ and $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ then find $f(z)$ in terms of z. [5]

यदि $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है और $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$, $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

Unit-II / इकाई-II

4. (a) Find the image of infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = 1/z$. [5]

रूपान्तरण $w = 1/z$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ into the straight line $4u + 3 = 0$. [5]

सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है।

OR / अथवा

5. (a) Find the invariant or fixed points and the normal form of the following bilinear transformation. $w = \frac{3z-4}{z-1}$. [5]

द्विरैखिक रूपान्तरण $w = \frac{3z-4}{z-1}$ के स्थिर बिन्दु तथा सामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

(b) Explain the exponential transformation $w = e^z$. [5]

चरघातांकी रूपान्तरण $w = e^z$ को समझाइए।

Unit-III / इकाई-III

6. Evaluate $\int_c (z^2 + 3z + 2)dz$

where C is the arc of the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ between the points (0, 0) and $(\pi a, 2a)$. [10]

मान ज्ञात कीजिए $\int_c (z^2 + 3z + 2)dz$

जहाँ C चक्रज $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ का बिन्दुओं (0, 0) तथा $(\pi a, 2a)$ के मध्य चाप है।

OR / अथवा

7. The derivative of an analytic function is itself an analytic function. [10]

किसी विश्लेषिक फलन का अवकलज स्वयं एक विश्लेषिक फलन होता है।

Unit-IV / इकाई-IV

8. Expand the function $\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ which are valid for the following regions : [10]

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 4$

(iii) $|z| > 4$

फलन $\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ का प्रसार कीजिए जो कि निम्न क्षेत्र के लिए वैध हो :

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 4$

(iii) $|z| > 4$

OR / अथवा

9. Define the following : [4×2½=10]

निम्न को परिभाषित कीजिए :

(i) Removable singularity
अपनेय विचित्रता

(ii) Isolated essential singularity
वियुक्त अनिवार्य विचित्रता

(iii) Pole
अनन्तक

(iv) Non-isolated essential singularity
अवियुक्त अनिवार्य विचित्रता

SECTION-C / खण्ड-स

10. (a) If $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ is analytic function in domain D then $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic functions in D. [10]

यदि प्रांत D में $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ एक विश्लेषिक फलन हो तो $u(x,y)$ तथा $v(x,y)$ प्रांत D में प्रसंवादी फलन है।

(b) If $u + v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function then find f(z) in terms of z. [10]

यदि $u+v=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ तथा $f(z)=u+iv$ एक विश्लेषिक फलन हो तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

11. (a) If $w=f(z)$ represents a conformal transformation of a domain D in the z-plane into a domain D' of the w. plane then $f(z)$ is an analytic function of z in D. [10]

यदि $w=f(z)$ प्रदेश D का z-समतल में एक अनुरूप रूपांतरण w-समतल के प्रदेश D' में है, तब $f(z)$, z का विश्लेषिक फलन D में है।

(b) Find a bilinear transformation that maps the points $z=2, i, -2$ into $w=1, i, -1$ respectively. [10]

एक द्विरैखिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z=2, i, -2$ को $w=1, i, -1$ में प्रतिचित्रित करता है।

12. (a) State and prove Morera theorem. [10]

मोरेरा प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

(b) Using the integral representation of $f^n(0)$, prove that $\left(\frac{x^n}{\lfloor n}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^n e^{xz}}{\lfloor n \cdot z^{n+1}} dz$.

where C is any closed contour surrounding the origin hence show that

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{\lfloor n}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta.$$ [10]

$f^n(0)$ के समाकल निरूपण का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{x^n}{\lfloor n}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^n e^{xz}}{\lfloor n \cdot z^{n+1}} dz$ जहाँ C मूल बिन्दु के परिवेश में कोई संवृत्त कंटूर है। फलतः प्रदर्शित कीजिए कि :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{\lfloor n}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta$$

13. (a) Find the residues of $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at $z=1,2,3$ and infinity and show that their sum is zero. [10]

$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z=1,2,3$ एवं अनन्त पर अवशेष ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि उनका योग शून्य है।

(b) Every polynomial equation $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+....+a_nz^n=0$ where the degree $n\geq 1$ and $a_n\neq 0$ has at least one root. [10]

प्रत्येक बहुपद समीकरण $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+....+a_nz^n=0$ यहाँ पर कोटि $n\geq 1$ तथा $a_n\neq 0$ का कम से कम एक मूल है।

—— x ——